



Olimpiada Națională de Matematică 2026
Etapă locală – Iași, 30 ianuarie 2026
Clasa a VII-a
Barem de notare și evaluare

Problema 1. (25 puncte)

Se dă mulțimea $A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid 1 < \sqrt{1+\sqrt{n}} < 2 \right\}$.

a) Enumerați elementele mulțimii A .

b) Determinați $n \in A$, astfel încât $\sqrt{n} \cdot \left| 1 - \sqrt{1+\sqrt{n}} \right| < 1$.

Problema S:E25.291, Supliment Gazeta Matematică nr. 10 / 2025

Soluție:

a) Ridicăm relația $1 < \sqrt{1+\sqrt{n}} < 2$ la puterea a doua, obținând: 4p

$$1 < 1 + \sqrt{n} < 4 \Rightarrow 0 < \sqrt{n} < 3,$$

de unde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 4p

b) Cum $1 < \sqrt{1+\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \left| 1 - \sqrt{1+\sqrt{n}} \right| = \sqrt{1+\sqrt{n}} - 1$ 4p

Relația din ipoteză devine $\sqrt{n} \cdot (\sqrt{1+\sqrt{n}} - 1) < 1$, de unde

$$\sqrt{n(1+\sqrt{n})} < 1 + \sqrt{n} \mid : \sqrt{1+\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} < \sqrt{1+\sqrt{n}} \Rightarrow n < 1 + \sqrt{n},$$

adică $\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n} - 1) < 1$ 6p

Pentru $n \geq 4$ avem că $\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n} - 1) \geq 2 > 1$, deci problema nu admite soluții. 4p

Verificăm relația pentru $n \in \{1, 2, 3\}$;

obținem soluțiile $n = 1$, respectiv $n = 2$ 3p

Problema 2. (25 puncte)

Triunghiul echilateral ABC este înscris într-un cerc de centru O , iar M este un punct situat pe arcul mic BC , diferit de mijlocul acestuia.

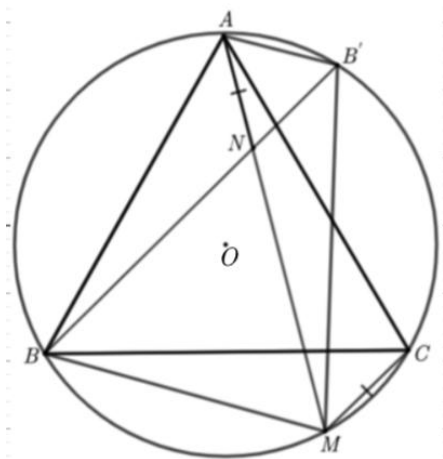
Pe semidreapta (AM) se consideră punctul N astfel încât $AN \equiv MC$.

Să se arate că:

- Triunghiurile NBM și ANB' sunt echilaterale, unde B' este intersecția semidreptei (BN) cu cercul.
- Patrulaterul $NBMC$ nu poate fi inscriptibil.
- Patrulaterul $ABMB'$ este trapez isoscel.

Soluție:

a)



$$\triangle ABN \equiv \triangle CBM \text{ (LUL)} \Rightarrow NB \equiv MB \Rightarrow \triangle BMN \text{ -isoscel} \dots\dots\dots 3p$$

$$\angle BMA = \frac{BA}{2} = \angle BCA = 60^\circ \Rightarrow \triangle NBM \text{ este echilateral.} \dots\dots\dots 3p$$

$$\left. \begin{aligned} \angle AB'B = \frac{AB}{2} = \angle ACB = 60^\circ \\ \angle ANB' = \angle BNM = 60^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ANB' \text{ este echilateral} \dots\dots\dots 3p$$

$$\left. \begin{aligned} \angle BMC = \angle BMA + \angle AMC = \frac{AB}{2} + \frac{AC}{2} = 120^\circ \\ \angle BNC = \angle BNM + \angle MNC = 60^\circ + \angle MNC \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 4p$$

$$\Rightarrow \angle BMC + \angle BNC = 180^\circ + \angle MNC > 180^\circ \Rightarrow \text{patrulaterul } NBMC \text{ nu este inscriptibil} \dots\dots\dots 4p$$

$$\begin{aligned} \text{c) Deoarece } \angle NBM = 60^\circ \Rightarrow B'CM = 120^\circ = \angle ABM \Rightarrow AB \equiv B'M, \text{ iar} \\ \angle B'AM = \angle AMB = 60^\circ \text{ (unghiuri alterne interne)} \Rightarrow AB' \parallel BM \dots\dots\dots 4p \end{aligned}$$

Punctul M nu este mijlocul arcului BMC

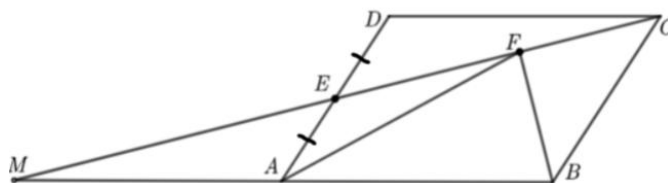
$$\begin{aligned} \Rightarrow BM \neq MC \Rightarrow \left. \begin{aligned} AB' = AN = MC \neq BM \\ AB' \parallel BM \end{aligned} \right\} \Rightarrow ABMB' \text{ este trapez isoscel,} \\ \text{de baze } AB' \text{ și respectiv } BM \dots\dots\dots 4p \end{aligned}$$



Problema 3. (20 puncte)

Paralelogramul $ABCD$ are $\angle A < 90^\circ$. Fie punctul E mijlocul laturii AD și punctul F pe segmentul EC astfel încât $AF \equiv AB$. Demonstrați că $BF \perp EC$.

Soluție:



Notăm $\{M\} = CE \cap AB$.

$$\triangle EAM \equiv \triangle EDC \Rightarrow AM \equiv DC \equiv AB \dots\dots (ULU)$$

8p

În $\triangle MFB$ avem: FA mediană și $FA = \frac{MB}{2} \Rightarrow \angle MFB = 90^\circ \Leftrightarrow BF \perp EC \dots\dots\dots$

12p

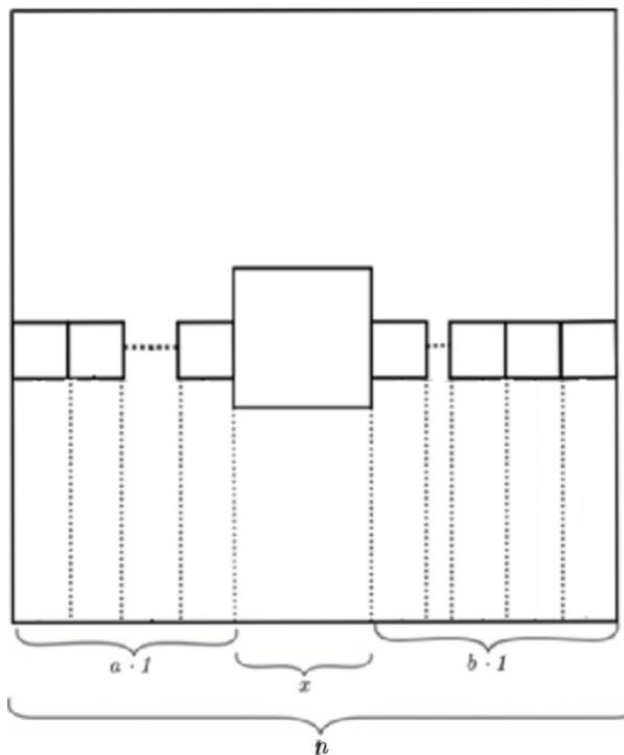


Problema 4. (20 puncte)

Un pătrat cu latura de lungime n a fost împărțit în 25 de pătrățele, acestea având laturile paralele cu laturile pătratului inițial. Se știe că 24 dintre ele au latura de lungime 1 și al 25-lea pătrățel are latura de lungime x , $x \neq 1$.

- a) Arătați că numerele n și x sunt naturale.
b) Determinați numerele n , respectiv x .

Soluție:



- a) Pătrățelul cu latura de lungime x ($x < n$) va avea în comun cu pătratul mare:

- o latură, sau
- două laturi sau
- nicio latură;

astfel, pătratul mare va avea cel puțin o latură pe care se vor așeza numai pătrățele cu latura de lungime 1, așadar $n \in \mathbb{N}^*$.

Distanța dintre două laturi paralele ale pătratului inițial este:

$$n = a \cdot 1 + x + b \cdot 1 \Rightarrow x = n - a - b,$$

unde a și b reprezintă numărul pătratelor aflate la stânga, respectiv la dreapta pătratului de latură $x \neq 1$ ($a, b \in \mathbb{N}$)

Cum $n - a - b \in \mathbb{Z}$ și $x > 0$, obținem: $x \in \mathbb{N}$.

8p

- b) Exprimăm aria pătratului inițial în două moduri:

Aria pătratului inițial este n^2

Aria pătratului inițial este suma ariilor pătratelor interioare, adică: $x^2 + 24 \cdot 1^2$.

Atunci: $n^2 = x^2 + 24 \cdot 1^2 \Rightarrow (n - x)(n + x) = 24$ 6p

Avem: $n - x < n + x$, $n - x \in \mathbb{N}$, $n + x \in \mathbb{N}$.

Vom discuta, astfel, valorile următoare:

$n - x$	1	2	3	4
$n + x$	24	12	8	6
n	$\notin \mathbb{N}$	7	$\notin \mathbb{N}$	5
x	$\notin \mathbb{N}$	5	$\notin \mathbb{N}$	1

Știm că:

$x \in \mathbb{N}$, $x \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$; obținem: $n = 7$ și $x = 5$.

6p

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.

Din oficiu se acordă 10 puncte.

Etapă locală ONM – Iași, 30 ianuarie 2026 – Barem de notare

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași

Tel: +40 (0)232 26 80 14

Fax: +40 (0)232 26 77 05

www.isjiiasi.ro